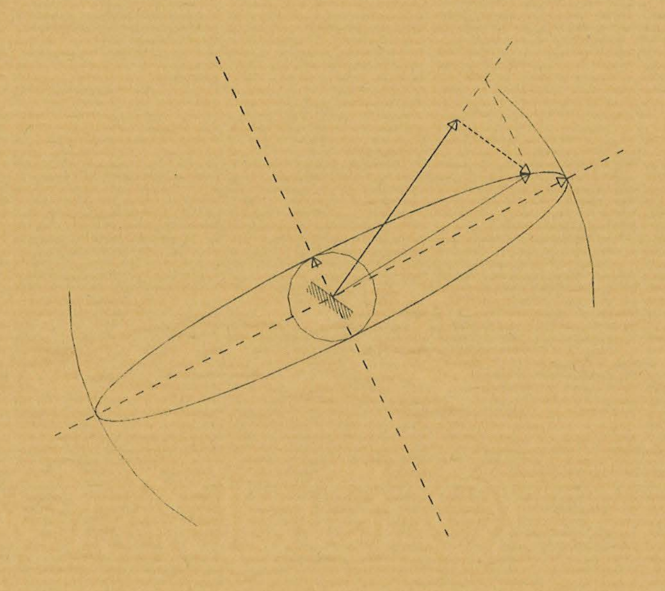
INTRODUCCIÓN A LA ELASTICIDAD

por

Ricardo Aroca Hernández-Ros



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-11

INTRODUCCIÓN A LA ELASTICIDAD

por

RICARDO AROCA HERNÁNDEZ-ROS

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-16-11

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

1 Área
16 Autor
11 Ordinal de cuaderno (del autor)

ÁREAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

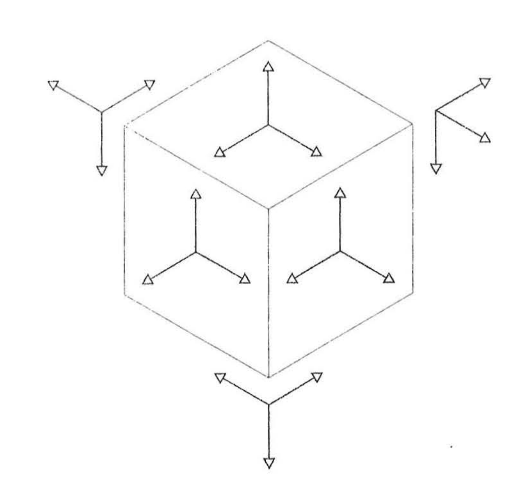
Introducción a la elasticidad

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 119.02 / 1-16-11
ISBN: 84-9728-157-8 (2ª edición)
Depósito Legal: M-10601-2005

INTRODUCCIÓN

La teoría de la elasticidad se desarrolla en el siglo XIX y constituye la base científica del análisis de estructuras.

Sin necesidad de ninguna consideración previa sobre la forma de la estructura ni las acciones que actúan sobre ella, supuesto resuelto el problema de conocer el estado de tensiones en cada punto de la estructura y partiendo de la hipótesis de que existen unas funciones continuas y derivables, con primera derivada también continua tales que en cada punto tienen el valor de la componente de tensión correspondiente, el equilibrio local de un paralelepípedo genérico cuyas dimensiones tienden a cero puede expresarse en forma de seis ecuaciones diferenciales.



Como el número de funciones incógnitas de tensión $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, t_{xy}, t_{yx}, t_{yz}, t_{zy}, t_{zx}, t_{xz}\}$ excede en tres al número de ecuaciones es preciso acudir a las condiciones de deformación. Aquí entra en juego el modelo de material; en el desarrollo original de la teórica, un modelo de material homogéneo e isótropo con comportamiento lineal permite relacionar tensiones locales con deformaciones unitarias locales mediante sólo dos constantes independientes, (el juego de constantes más comúnmente usado es el E, G, υ en el que $G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$

(Aunque pueden manejarse juegos de relaciones mucho más complejas para modelar materiales de comportamiento anisótropo y no lineal, la teoría se desarrolla al tiempo que la industria del acero cuyo comportamiento en fase elástica se ajusta con gran precisión al modelo de dos constantes independientes)

Al juego de 3 componentes normales y 6 tangenciales de tensión, corresponde otro de 3 componentes de dilatación y 6 de distorsión $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}, \gamma_{zx}, \gamma_{xz}\}$, ambos juegos

se relacionan a través de las constantes elásticas mediante expresiones del tipo:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma - \upsilon \cdot \sigma_y - \upsilon \cdot \sigma_z\right)$$

Partiendo de que al estar la estructura en equilibrio, también lo está cada uno de sus paralelepípedos elementales pueden plantearse 6 ecuaciones de equilibrio, 3 de fuerzas y 3 de momentos.

Las tres ecuaciones de equilibrio de momentos pueden traducirse directamente en una reducción del número de incógnitas de componentes tangenciales de tensión y de distorsión:

$$t_{xy} = t_{yx} \ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \ldots\ldots\ldots$$

lo que reduce el problema, expresado en términos de tensiones $\{\sigma\}$ o de deformaciones locales $\{\varepsilon\}$ a un sistema de 3 ecuaciones diferenciales de equilibrio con 6 funciones incógnitas.

La solución del problema consiste en usar como incógnita el vector **desplazamiento** $\{u, v, w\}$ de cada punto (suponiendo también que existen 3 funciones que expresan el desplazamiento de cada punto)

La relación entre las deformaciones y los desplazamientos es también diferencial.

Sustituyendo tensiones por deformaciones y éstas por desplazamientos se obtiene un sistema de 3 ecuaciones en derivadas parciales con 3 incógnitas que resuelve teóricamente cualquier problema; cabe resaltar que lo que se obtiene primero es la nueva forma de la estructura de la que se deducen luego deformaciones locales y tensiones.

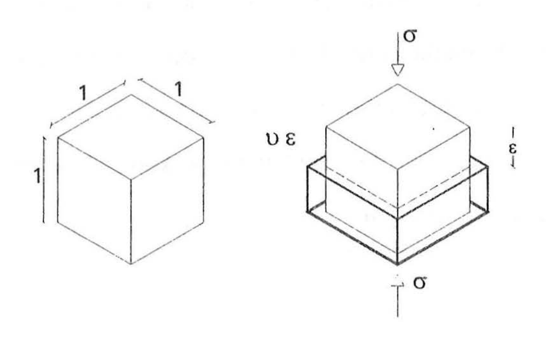
Las constantes de integración permiten establecer las condiciones de contorno (forma de la estructura, acciones y sustentación).

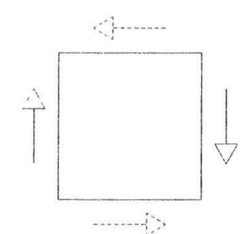
El sistema algebraico no tiene solución exacta más que para casos triviales de forma, sustentación y carga, y es necesario introducir simplificaciones (como la que da lugar a la teoría de vigas) o discretizar el problema como en el método de los elementos finitos.

Subsiste el problema de que las tensiones obtenidas están ligadas a un sistema de referencia. En la segunda parte se aborda este problema, demostrando primero que basta conocer las tensiones (o las deformaciones unitarias) ligadas a un sistema de referencia para disponer automáticamente de los valores correspondientes a cualquier otro sistema, así como obtener los valores extremos de tensión y las direcciones de corte a las que corresponden.

LAS CONSTANTES ELÁSTICAS

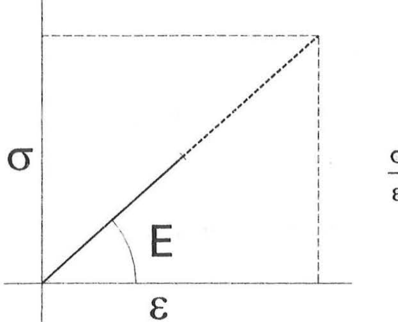
En las estructuras formadas por barras solicitadas según su eje (comprimidas o extendidas) bastan unos modelos muy simples para representar el comportamiento del material, para cualquier otro caso es necesario considerar que los sólidos reales son tridimensionales y aún en el caso de tensiones según un sólo eje, los cambios de dimensión en una dirección tienen consecuencias en las perpendiculares a ella (aunque ello sea irrelevante para el comportamiento de las estructuras de barras comprimidas y extendidas).





Por otra parte las tensiones de cortadura implican necesariamente situaciones complejas para que el sólido elemental esté en equilibrio (un solo par de fuerzas haría girar al elemento)

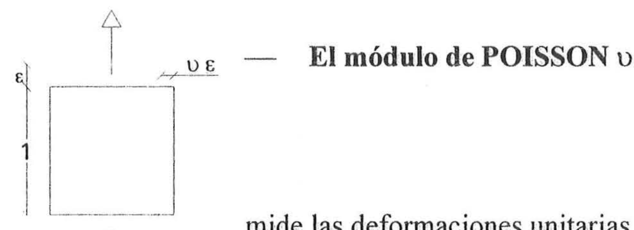
En lo que sigue se parte de la base que la estructura está construida con un material homogéneo e isótropo (con las mismas propiedades en todo punto y en todas las direcciones de cada punto) que tiene deformaciones proporcionales a las tensiones aplicadas, de manera que la gráfica tensión deformación para un ensayo axial es del tipo:



$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ constante

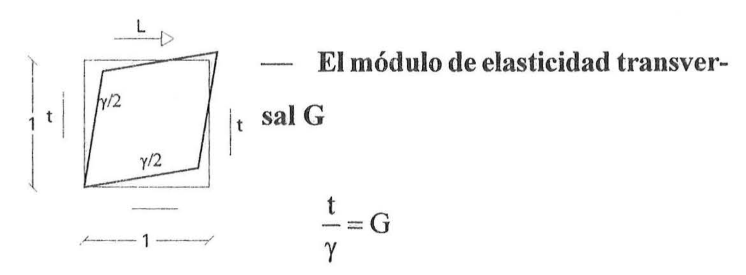
la pendiente **E** de la gráfica es el **módulo de elasticidad**.

La definición del material precisa de otras dos constantes elásticas:



— **El módulo de POISSON υ**

mide las deformaciones unitarias en sentido transversal a la tensión normal



— **El módulo de elasticidad transversal G**

$$\frac{t}{\gamma} = G$$

mide la relación entre la tensión tangencial y la distorsión

Las tres constantes están relacionadas por la expresión

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \upsilon)}$$

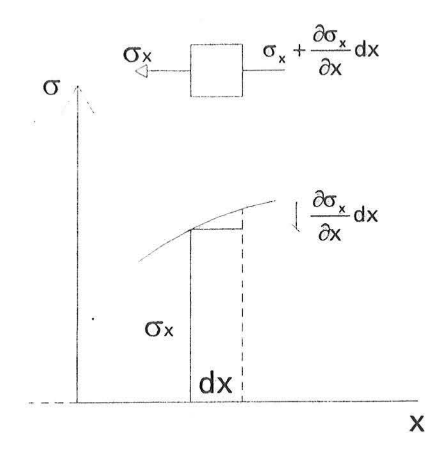
Por lo que solamente dos parámetros numéricos definen un material Elástico Homogéneo e Isótropo

ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO

Sea cual sea la forma de una estructura puede dividirse en paralelepípedos de dimensiones dx dy dz que pueden hacerse tan pequeños como se quiera.

En cada cara del paralelepípedo elemental la resultante de las tensiones repartidas que representan el efecto del resto de la estructura sobre el paralelepípedo tiene tres componentes que cuando el tamaño del paralelepípedo tiende a 0 estarán situadas en el centro de la cara:

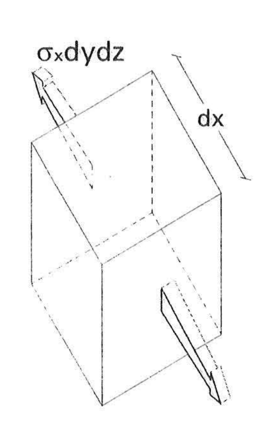
3 componentes de tensión en cada una de las 6 caras del cubo, eleva a 18 el número de componentes de tensión implicadas en el equilibrio de cada paralelepípedo. Este número puede reducirse a la mitad (9) con el siguiente artificio:



Se supone que hay 9 funciones de tensión $\begin{Bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \\ t_{xy} & t_{yz} & t_{zx} \\ t_{xz} & t_{yx} & t_{zy} \end{Bmatrix}$

(continuas, derivables y cuya primera derivada es también continua), que en cada punto de coordenadas (x y z) toman el valor de las tensiones, de esta forma hay únicamente 9 funciones incógnita en el total de la estructura, cada una de las cuales tiene valores distintos en caras opuestas del cubo.

Cuando las dimensiones del elemento tienden a 0, puede sustituirse una función por su tangente, de manera que la diferencia de una de las componentes de tensión (por ejemplo σ_x) entre dos caras paralelas es $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\ dy\ dz$ razonamiento que puede extenderse a las otras 8 componentes de tensión.



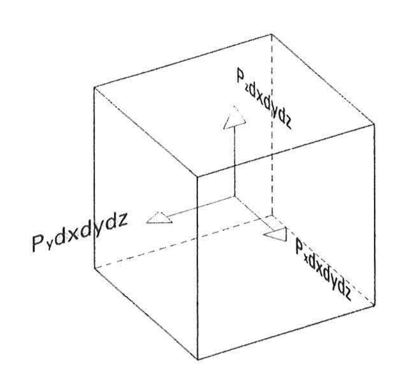
$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy\ dz =$$

$$= \sigma_x \cdot dy\ dz + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\ dy\ dz$$

Salvo en el caso de los elementos de borde en los que las acciones exteriores serán prescritas como condiciones de contorno, las únicas fuerzas que pueden existir además de las tensiones en los cortes son las **fuerzas de masa**, proporcionales al volumen del elemento dx dy dz, y que estarán situadas en el centro del paralelepípedo.

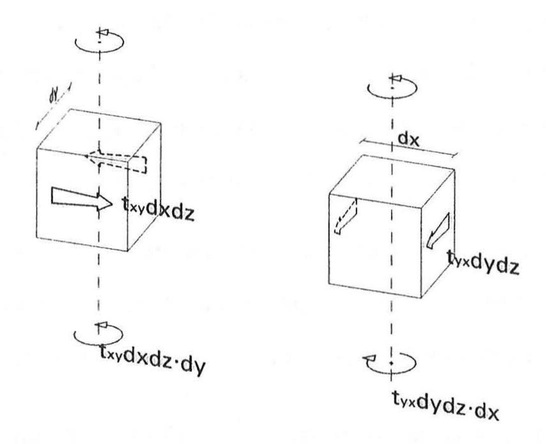
Con estos datos pueden plantearse las 6 ecuaciones genéricas que expresan el equilibrio en todos los puntos de la estructura:

(los dibujos sólo representan las fuerzas implicadas en cada una de las ecuaciones de equilibrio)



ecuaciones de equilibrio de momentos

las únicas fuerzas que no cortan el eje de giro son las tangenciales de las caras paralelas al eje



sólo quedan dos pares de fuerzas en sentido contrario que deben ser iguales para que el momento respecto el eje z sea nulo.

$$t_{xy} \cdot dydz \cdot dx = t_{yx} \cdot dxdz \cdot dy \qquad t_{xy} = t_{yx}$$

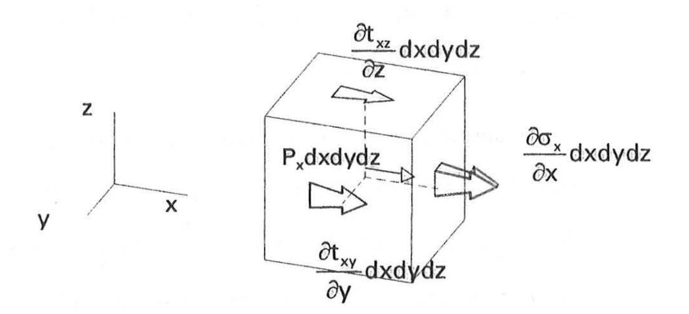
(las variaciones $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial t_{xy}}{\partial x} \cdot dxdydz \cdot dx \\ \dfrac{\partial t_{yx}}{\partial y} \cdot dydxdz \cdot dy \end{bmatrix}$, son infinitésimos de orden superior que pueden despreciarse), las otras dos ecuaciones de equilibrio de momentos dan como resultado

$$\mathbf{t}_{xz} = \mathbf{t}_{zx}$$
$$\mathbf{t}_{yz} = \mathbf{t}_{zy}$$

lo que a costa de 3 de las ecuaciones de equilibrio (de momentos) reduce a 6 el número de funciones incógnita y deja sólo las 3 ecuaciones de equilibrio de fuerzas restantes, es decir

ecuaciones de equilibrio de fuerzas

en el sentido del eje x



de los pares de valores de las distintas funciones de tensión aplicados en caras opuestas, solo quedan en la dirección x las dibujadas en la figura, de lo que dividiendo dxdydz en todos los términos resulta la ecuación:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} + P_x = 0$$

las otras dos ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + P_y = 0$$

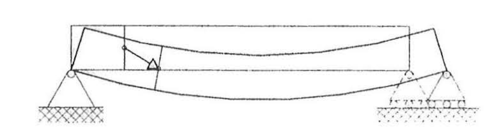
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + P_z = 0$$

la reducción del número de incógnitas se salda con la formulación de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que no puede resolverse ya que hay 3 ecuaciones para 6 funciones incógnitas.

movimiento de la estructura:

Como sólo se dispone de 3 ecuaciones, es preciso formular el problema de manera que sólo haya 3 incógnitas, para ello se recurre a la geometría:

Cuando se carga una estructura aparece en ella unas tensiones $\{\sigma\}$ cuya consecuencia son unas deformaciones locales $\{\varepsilon\}$ relacionadas con ellas por medio de las constantes elásticas E, υ, G (es posible la formulación de modelos anisótropos empleando un mayor número de constantes elásticas).



La figura deformada, encuentra su posición en el espacio si las condiciones de sustentación son suficientes.

El vector movimiento de cada uno de los puntos de la estructura tiene sólo tres componentes u, v, w, tres funciones u(x y z), v(x y z), w(x y z) describen el movimiento completo de la estructura, las 6 componentes del vector $\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}$

correspondientes a las de $\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ t_{xy}\\ t_{yz}\\ t_{xz}\end{Bmatrix}$ no son independientes

puesto que pueden ser expresadas en función de derivadas del vector $\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix}$

Basta pues expresar las ecuaciones de equilibrio en términos de $\{\varepsilon\}$ utilizando para ello las constantes elásticas y sustituir los

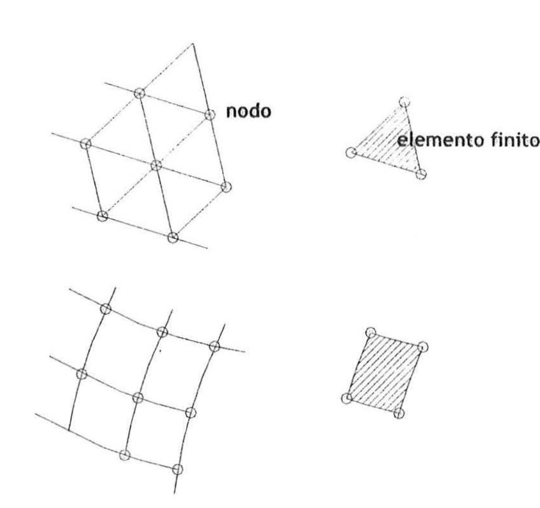
$\{\varepsilon\}$ por derivadas del vector $\{u\}$ para tener un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, si bien es verdad que se trata de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. Las constantes de integración permiten introducir las condiciones de contorno (forma de la estructura, sustentación y acciones exteriores), lo que resuelve cualquier problema estructural (basta introducir la nueva variable tiempo para el vector $\{u\}$ y las fuerzas de masa como consecuencia de las aceleraciones para resolver también todos los problemas dinámicos)

Con este desarrollo queda totalmente resuelto el aspecto científico de la cuestión, sólo resta resolver el sistema de ecuaciones, un mero problema de cálculo que desgraciadamente sólo tiene solución algebraica exacta para casos triviales de forma, sustentación y carga de la estructura.

Para resolver algo parecido a un problema real hay que acudir al cálculo numérico , discretizando el problema y de esta forma el sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales se convierte en un sistema lineal de muchas más ecuaciones.

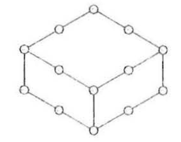
MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El procedimiento más empleado actualmente es el **método de los elementos finitos** que consiste en elegir una serie finita de puntos de la estructura (NODOS) cuyos movimientos se consideran representativos del movimiento general de la estructura y que son por tanto los valores a calcular.



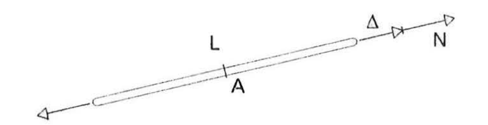
Se trocea la estructura en **elementos de dimensiones finitas** (que ya no tienden a 0) relacionados con los nodos, las figuras indican divisiones sencillas, aunque en ocasiones se emplean elementos complejos, con nodos intermedios en los lados, e incluso en el interior de los elementos.

(se obtiene la misma aproximación con pocos elementos muy complejos que con muchos sencillos)



Los nodos pueden a su vez tener unos movimientos propios (grados de libertad) limitados. El elemento más sencillo posible, es el utilizado ya en *El método*:

Una barra con 2 nodos en los extremos y un solo movimiento propio posible, el alargamiento o acortamiento en una sola dirección de su eje. Los movimientos de los nodos se traducen en deformaciones de la barra y éstas en tensiones de las que se deducen las fuerzas en los nodos necesarias para provocar los movimientos. En el caso del elemento barra:



$$N = \sigma \cdot A$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{L}$$

$$N = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \Delta$$

$N = k \cdot \Delta$ siendo $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{E \cdot A}}{\mathbf{L}}$, la rigidez axial de la barra

Cuando se utilizan elementos más complejos la expresión es:

$$\{N\} = [k] \cdot \{\Delta\}$$

los vectores $\{N\}$ y $\{\Delta\}$ tienen tantos componentes como grados de libertad tienen los nodos del elemento finito **y la matriz de rigidez del elemento [k]** es una matriz cuadrada.

Una vez formuladas las matrices de los elementos se ensambla una matriz $[k_u]$ en cuya diagonal se alinean las matrices [k] de los elementos que componen la estructura, rellenando el resto de ceros.

Una matriz de relación [B], rectangular relaciona los movimientos de los nodos expresados en términos de cada uno de los elementos con los movimientos permitidos de los nodos en términos de la estructura general $\{u\}$.

La matriz de rigidez de la estructura $[K]=[B]^T \cdot [k_u] \cdot [B]$ permite relacionar los movimientos de los grados de libertad $\{\delta\}$ con las acciones aplicadas $\{P\}$ (descritas desde la óptica de los grados de libertad)

$$\{P\}=[K]\cdot\{u\}$$

basta invertir la matriz de rigidez para calcular el movimiento de todos los nodos de la estructura.

$$\{u\}=[K]^{-1}\cdot\{P\}$$

Una vez calculados los movimientos $\{u\}$ de los nodos, lo que permite comprobar **rigidez** de la estructura, de ellos se deducen las deformaciones unitarias $\{\varepsilon\}$ y de éstas las tensiones $\{\sigma\}$ lo que permite comprobar si se verifica la condición de **resistencia**.

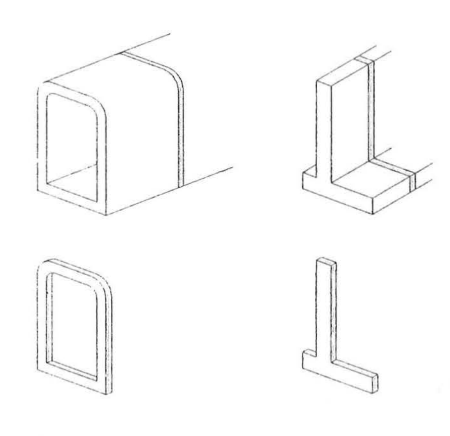
Una aplicación más sofisticada de los métodos numéricos permite aplicar la carga de forma gradual y modificar la geometría de la estructura en cada paso, incluyendo los cambios de posición de los puntos de aplicación de las cargas, lo que permite detectar automáticamente los problemas de **estabilidad**.

Los métodos paso a paso, permiten también simular con cierto éxito las plastificaciones locales y las fisuraciones no destructivas de las estructuras.

Conviene hacer algunas advertencias respecto a los métodos numéricos de análisis:

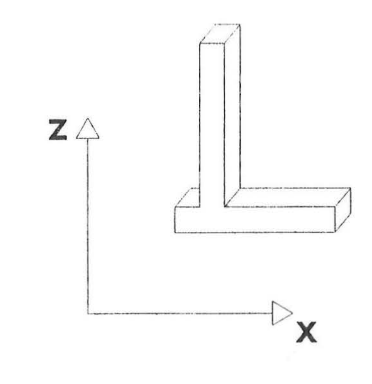
- Los modelos numéricos producen estructuras más rígidas que las reales, lo que se solventa aumentando el número de elementos.
- La cantidad de información que se obtiene es extremadamente abundante lo que la hace difícil de interpretar aunque hay pre y postprocesadores cada vez más eficaces para facilitar la entrada de datos y la interpretación de resultados
- Algunos materiales como el hormigón y las fábricas son difíciles de modelar adecuadamente, y un incorrecto modelado puede dar lugar a errores extremadamente grandes.

MODELOS PLANOS DEL PROBLEMA ELÁSTICO

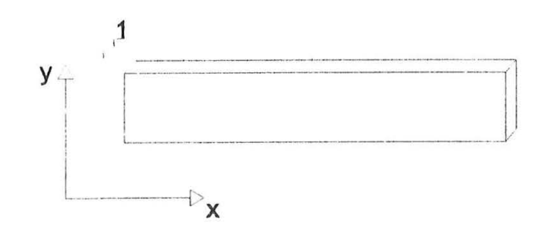


Pocas veces es necesario emplear un modelo tridimensional para analizar una estructura.

En estructuras de gran longitud y sección uniforme, son prácticamente imposibles las deformaciones en dirección transversal a una rodaja, solo hay deformaciones en un plano (el xz en este caso, aunque tradicionalmente se suele usar la notación xy), se produce pues un **estado plano de deformaciones** $\varepsilon_y = 0$ $\gamma_{xy} = 0$ $\gamma_{yz} = 0$ (no obstante las $\sigma_y \neq 0$ siempre que $\upsilon \neq 0$)



Cuando no existen coacciones ni solicitaciones en una de las direcciones se produce lo que se llama **estado plano de tensiones** en el que solo hay tensiones en un plano que suele denominarse xy (si $\upsilon \neq 0$ si hay deformaciones ε_z en el sentido de z)



Por ejemplo en una viga de sección rectangular, no hay tensiones en la dirección perpendicular al plano de la estructura (aunque sí deformaciones)

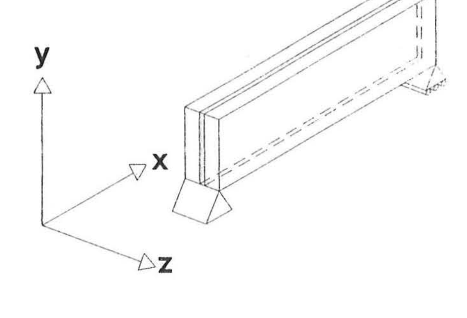
es el caso que más frecuentemente se plantea en estructuras y es el que se estudiará en lo que sigue:

ESTADO PLANO DE TENSIONES

En un estado plano de tensiones:

Normalmente se emplea como coordenada vertical "y" en lugar de "z" por lo que:

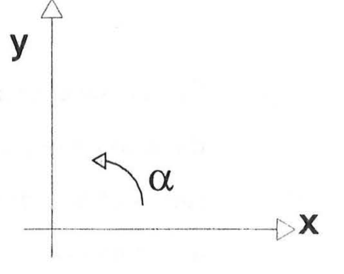
$$\sigma_z = 0 \quad t_{xz} = 0 \quad t_{yz} = 0$$



y solo quedan como tensiones significativas

σ_x σ_y t_{xy}, tres funciones incógnitas para las que hay dos ecuaciones de equilibrio (recuérdese que la ecuación de equilibrio de momentos se empleó para deducir que $t_{xy} = t_{yx}$, la igualdad se refiere naturalmente solo a los módulos de los vectores) persiste pues el problema del déficit de ecuaciones que se resuelve expresándolas en términos de **u, v.**

Para mantener el criterio generalmente empleado en los textos de elasticidad, en lo que sigue se toman como positivos:



y en el caso de las tensiones:

obsérvese la distinta relación de los sentidos positivos de t_{xy} y t_{yx} en relación con σ_x y σ_y

[La hipótesis de deformaciones planas formuladas por Bernouilli y Navier, válida para vigas de alma llena de esbeltez superior a 4, consiste en la óptica del problema elástico en imponer un campo de deformaciones simplificado con solo

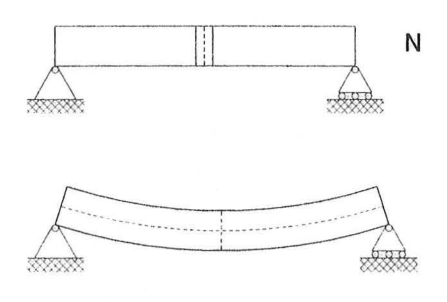
dos parámetros geométricos u y $\frac{1}{R}$ que se relacionan muy directamente con las solicitaciones:

$$\frac{1}{R}=\frac{M}{E \cdot I}$$

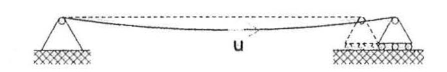
$$\frac{du}{dx}=\varepsilon_x=\frac{N}{A \cdot E}$$

una simplificación adicional del sistema resulta de suponer $\sigma_y=0$ ya que las tensiones verticales son mucho menores que las horizontales.

De estas simplificaciones resulta la **resistencia de materiales** que solo permite analizar estructuras reducibles a barras relativamente esbeltas, en estructuras superficiales como placas y láminas es necesario recurrir a la teoría de la elasticidad]



R



EL TENSOR DE TENSIONES

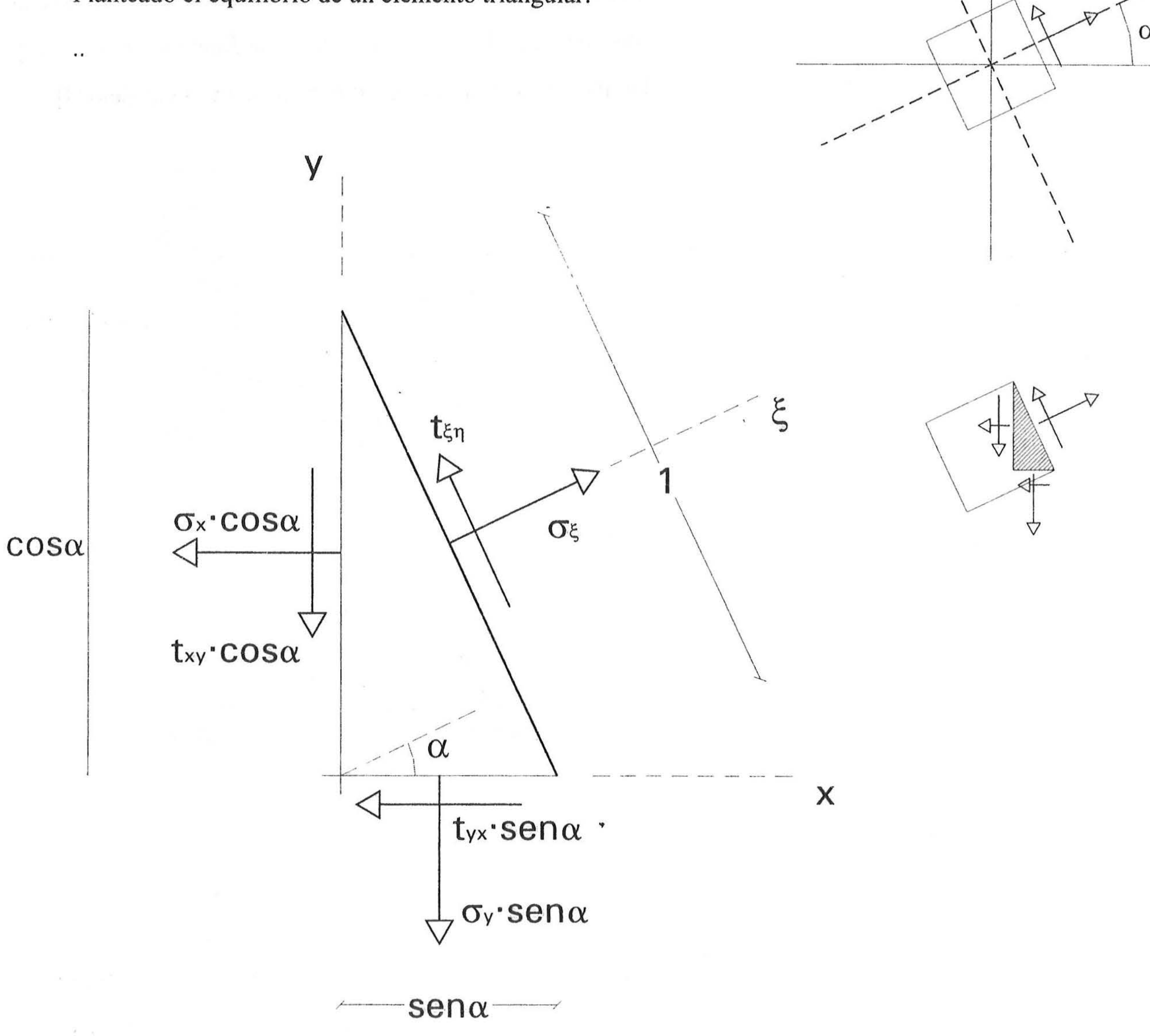
En un modelo con dos dimensiones, el primer problema que se plantea es la relación entre las tensiones y la dirección del corte.

Resuelto un problema y conocidas las tensiones asociadas a un sistema de corte ¿cómo averiguar las asociadas a otro sistema distinto? (en lo que sigue se supone que la dimensión z no representada es 1)

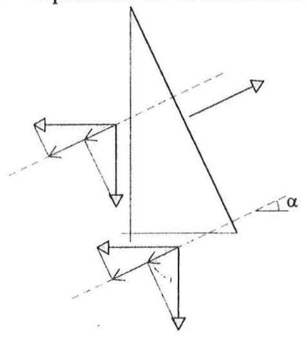
Cálculo de las tensiones asociadas a una dirección cualquiera ξ que forma un ángulo α con el eje x.

Planteado el equilibrio de un elemento triangular:

..



• equilibrio en la dirección ξ



$$\bullet\ \sigma_\xi = \sigma_x \cos^2\alpha + t_{xy} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha + t_{yx}\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha =$$

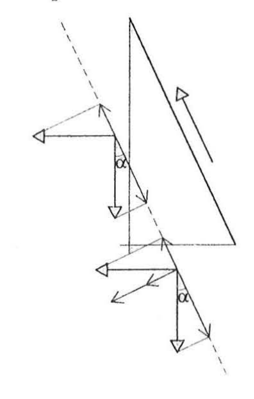
$$= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \cdot \operatorname{sen}^2\alpha + 2t_{yx}\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

$$\bullet\bullet\ t_{\xi\eta} = \sigma_y \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - t_{xy}\operatorname{sen}^2\alpha + t_{xy}\cos^2\alpha - \sigma_x \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{t_{\xi\eta} = t_{xy}\cos 2\alpha - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\alpha}$$

para poner σ_ξ en función del ángulo 2α basta observar que:

•• equilibrio en la dirección η



$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right) =$$

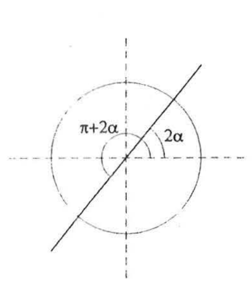
$$= \frac{\sigma_x}{2}\underbrace{\left(1 + \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)}_{2\cos^2\alpha} + \frac{\sigma_y}{2}\underbrace{\left(1 - \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right)}_{2\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

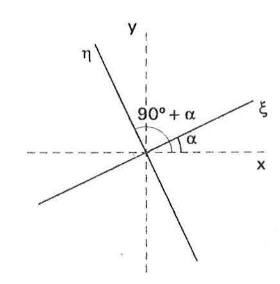
$$= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha$$

lo que permite escribir:

$$\boxed{\sigma_\xi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + t_{xy}\operatorname{sen} 2\alpha}$$

en la dirección perpendicular η que forma con el eje x un ángulo $\frac{\pi}{2} + \alpha$, puede aplicarse la misma fórmula sin más que sustituir el nuevo ángulo doble:

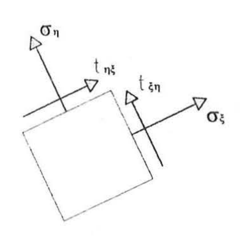




$$2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \pi + 2\alpha$$

$$\cos(\pi + 2\alpha) = -\cos 2\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\pi + 2\alpha) = -\operatorname{sen} 2\alpha$$



$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\eta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - t_{xy}\operatorname{sen} 2\alpha \\ t_{\eta\xi} &= -t_{xy}\cos 2\alpha + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\alpha = -t_{\xi\eta} \end{aligned}}$$

Se puede observar la igualdad de módulo de las tensiones tangenciales (con distinto signo) en direcciones perpendiculares.

DIRECCIONES PRINCIPALES

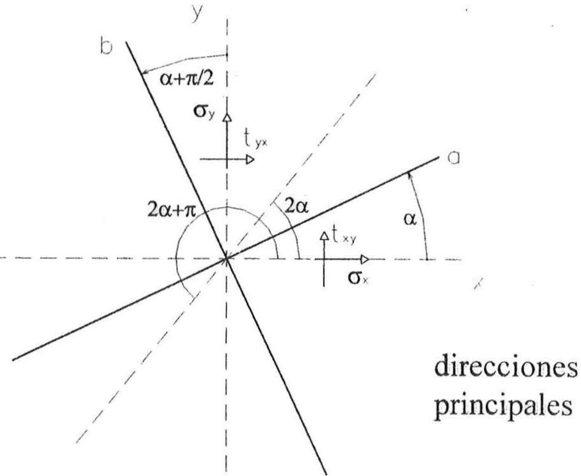
Para hallar los valores extremos de la tensión normal σ_x y las direcciones a y b en que se producen basta derivar respecto a α e igualar a cero:

$$\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\alpha} = 0 = -(\sigma_x - \sigma_y)\,\text{sen}\,2\alpha + 2t_{xy}\cos 2\alpha,$$

que resulta ser el valor de $2t_{\xi\eta}$

por tanto en las direcciones a y b de máxima y mínima tensión normal, la tensión tangencial es nula $\boxed{\mathbf{t_{ab} = 0}}$, las direcciones correspondientes son llamadas **direcciones principales.**

En las direcciones principales, perpendiculares entre sí, se dan los valores extremos, máximo y mínimo σ_b de tensión normal y la tensión tangencial t_{ab}=0. Siempre hay una forma de ver un problema tensional en la que no hay tensiones tangenciales.



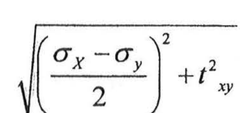
direcciones principales

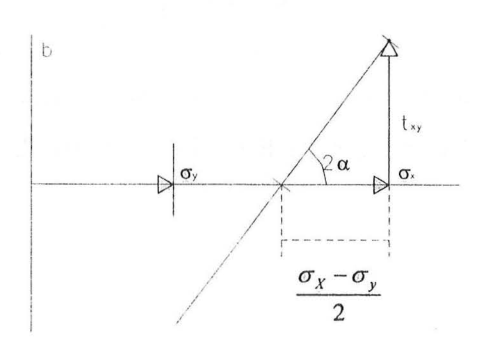
Para calcular el ángulo α_a que forma el diedro ab con e basta recordar:

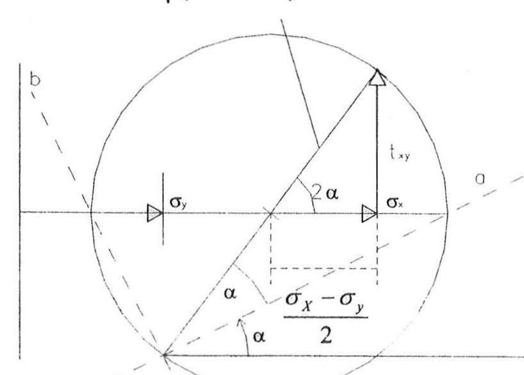
$$\boxed{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\alpha_a - t_{xy}\cos 2\alpha_a = 0}$$

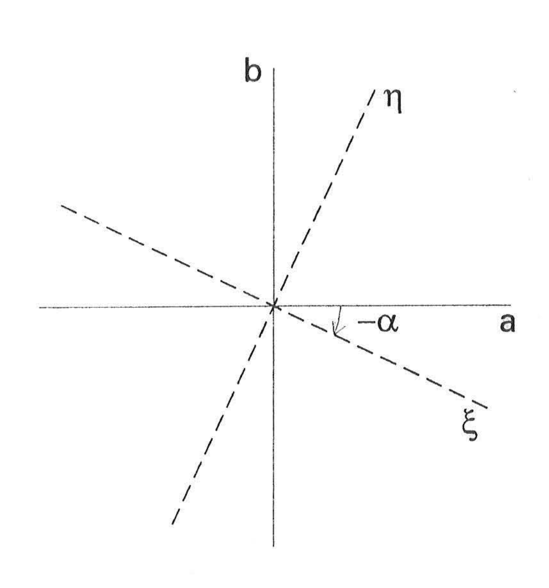
$$\boxed{\text{tg}\,2\alpha_a = \frac{t_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}} \qquad \alpha_a = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{t_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

Una vez calculadas las direcciones de las tensiones principales es inmediato calcular los valores σ_a y σ_b empleando las fórmulas obtenidas anteriormente.









$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_b = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Expresión canónica

Tomando las direcciones principales como referencia las fórmulas que permiten calcular la tensión en cualquier otra dirección se simplifican:

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} + \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}\cos 2\alpha$$

$$\sigma_\eta = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} - \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}\cos 2\alpha$$

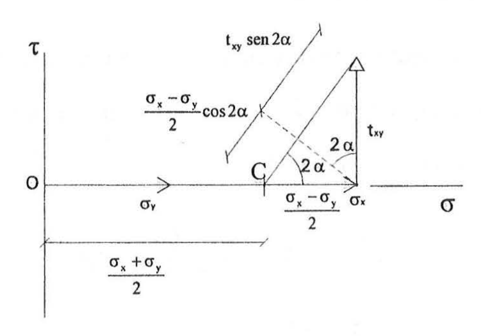
$$t_{\xi\eta} = -\frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}\operatorname{sen} 2\alpha$$

lo que permite unas sencillas construcciones como se verá más adelante.

RESOLUCIÓN GRÁFICA

Es fácil resolver gráficamente el problema de hallar la dirección y magnitud de las tensiones principales:

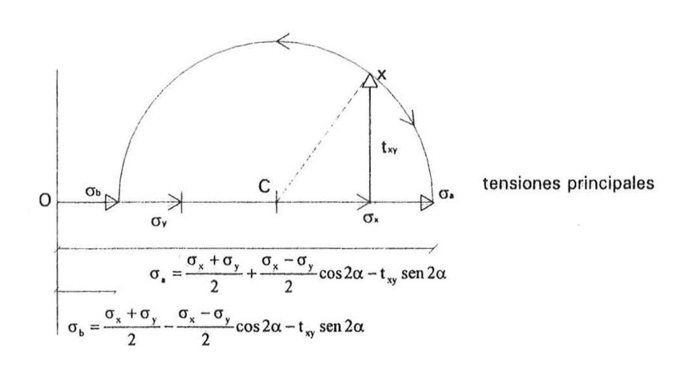
Llevando a un sistema de ejes σ τ los valores de σ_x σ_y t_{xy}



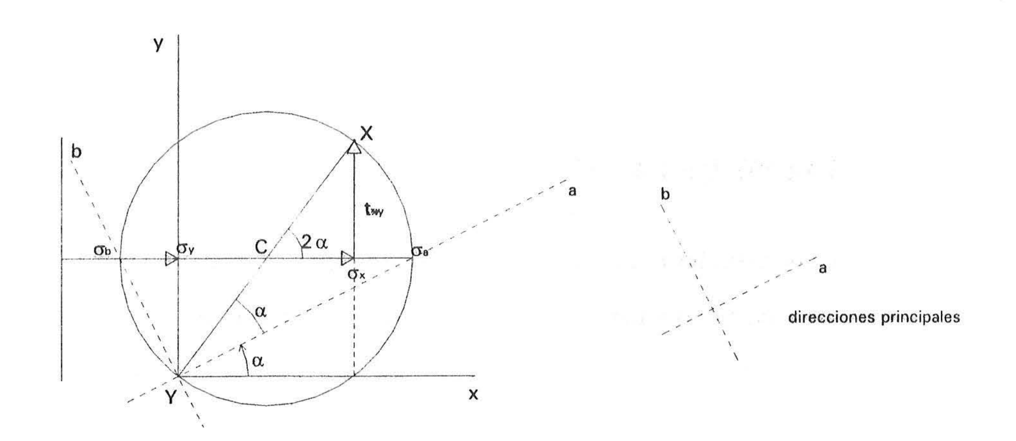
resulta que en el triángulo de catetos $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ y t_{xy} el ángulo del vértice de coordenadas $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ vale 2α ya que

su tangente es $\frac{t_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$, la hipotenusa mide

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + t_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\alpha$$



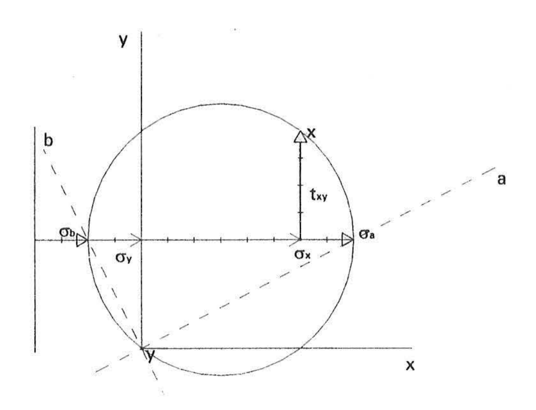
Por lo que trazando una circunferencia con centro en C y radio igual a la hipotenusa del triángulo (extremo del vector tensión asociado a la dirección x) sus puntos de corte con el eje σ dan los valores de σ_a y σ_b



las direcciones principales a y b se obtienen sin más que unir el punto Y diametralmente opuesto a X con los extremos de σ_a y σ_b basta recordar que el ángulo α que forma a con la horizontal es la mitad de 2α al ser el ángulo inscrito en la circunferencia.

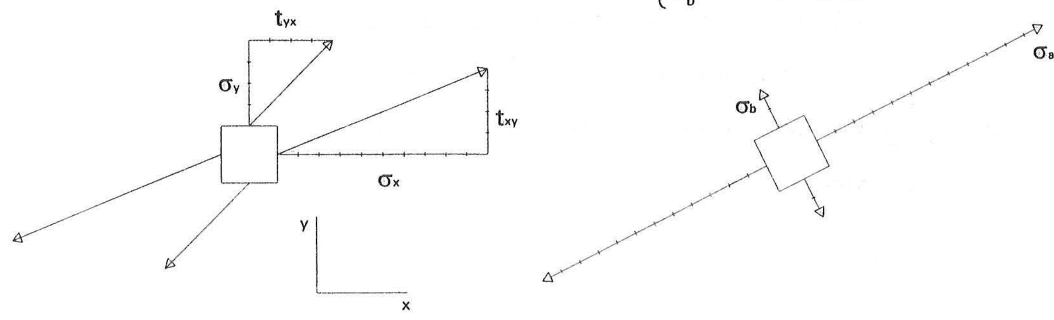
Un ejemplo numérico demuestra lo sencillo de la construcción:

$$\sigma_x = 10 \quad N \cdot mm^{-2}$$
$$\sigma_y = 4 \quad N \cdot mm^{-2}$$
$$t_{xy} = 4 \quad N \cdot mm^{-2}$$



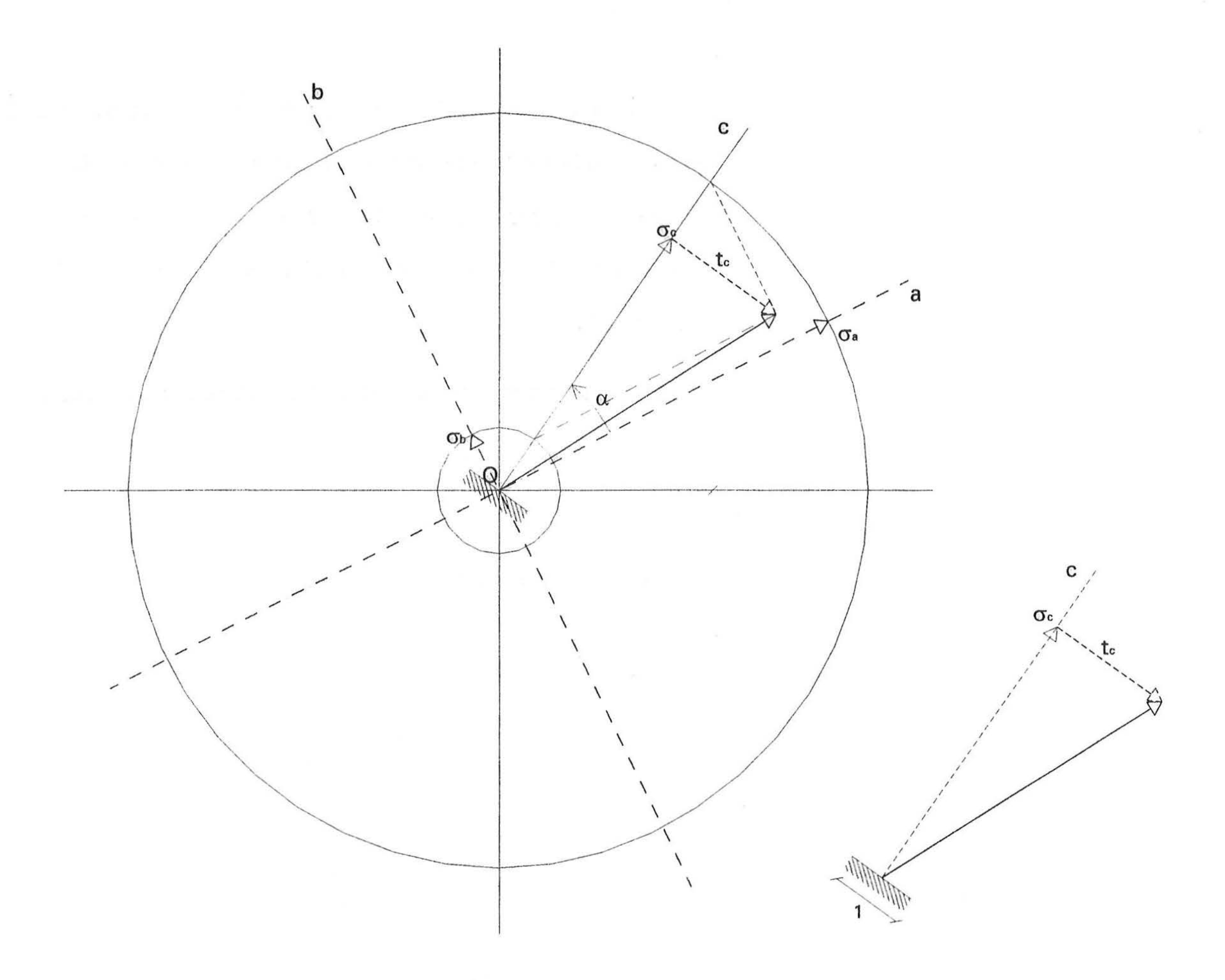
en la figura quedan determinadas las direcciones a y b

así como es fácil medir: $\begin{cases} \sigma_a = 12 \quad N \cdot mm^{-2} \\ \sigma_b = 2 \quad N \cdot mm^{-2} \end{cases}$



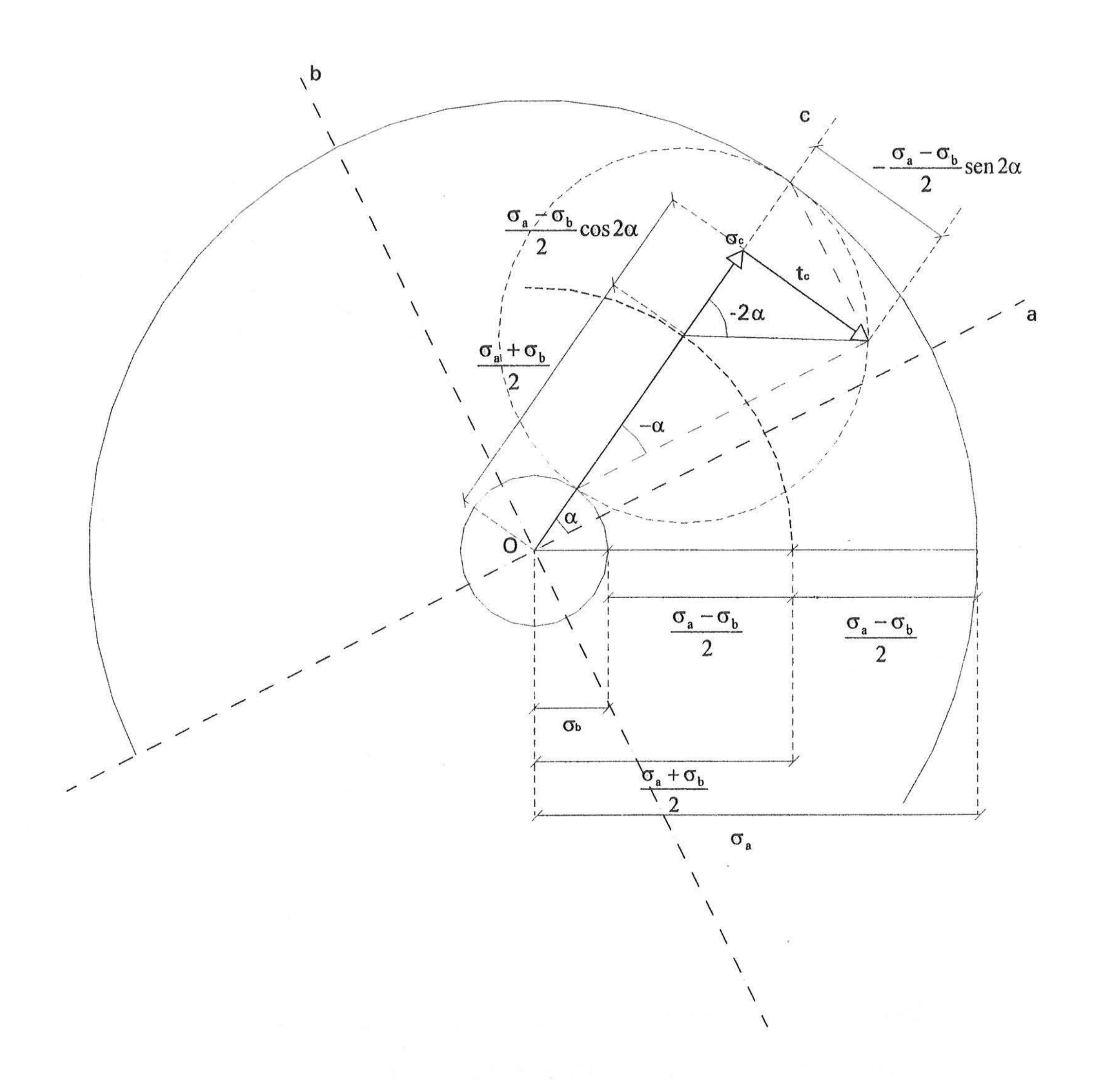
ELIPSE DE LAMÉ

Conocidas las tensiones y direcciones principales es sencillo calcular las asociadas a cualquier otra dirección de corte.



Trazando dos circunferencias auxiliares de radio σ_a y σ_b Para hallar la tensión en un corte cuya normal forma un ángulo α con el eje a, basta trazar la línea c en la dirección α y paralelas a los ejes a y b desde su intersección con las circunferencias auxiliares: en el punto de corte está el extremo del vector tensión en el corte que a su vez se descompondrá en la normal σ_c y la tangencial t_c.

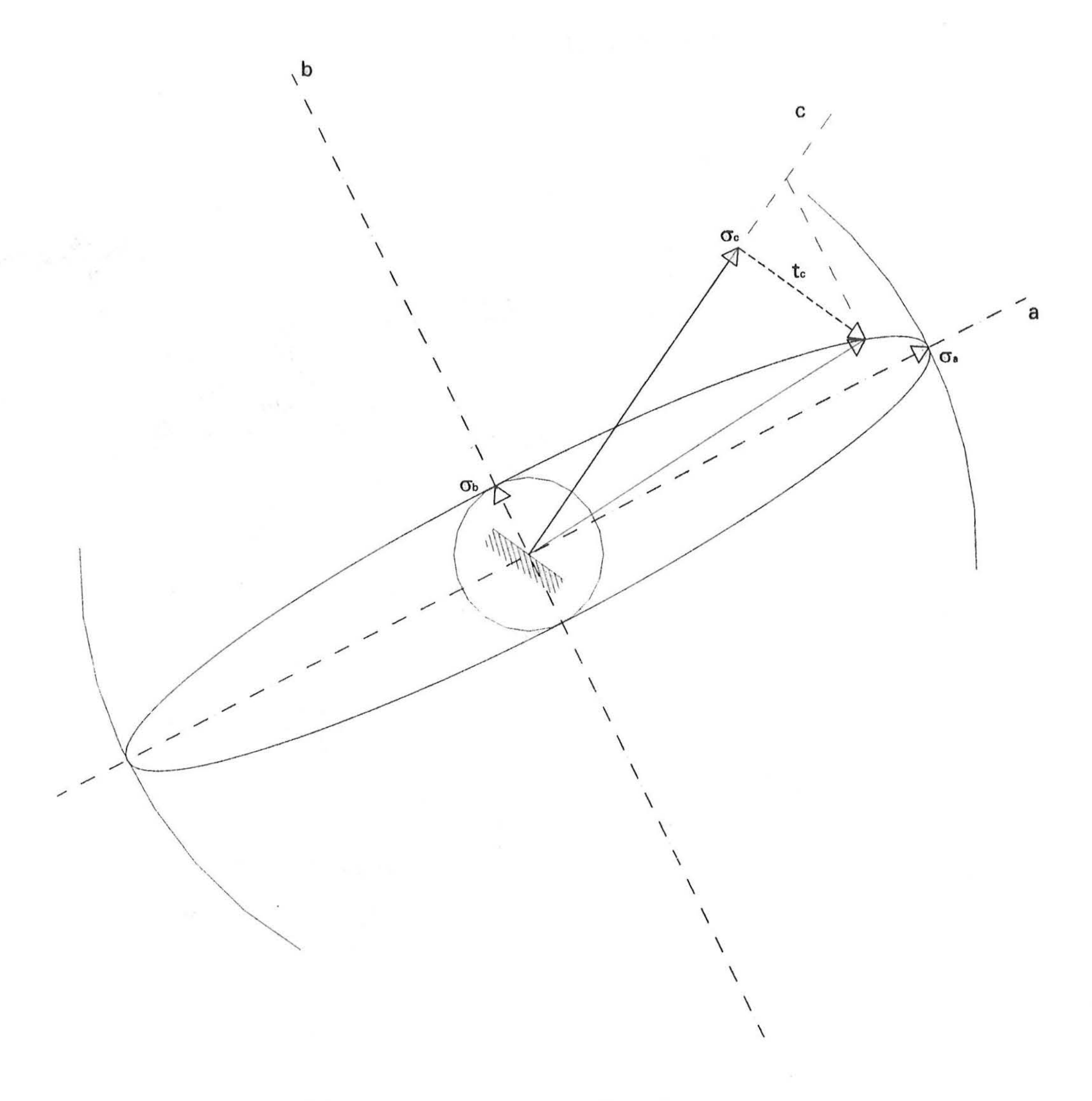
JUSTIFICACIÓN



La intersección de las paralelas a los ejes a y b se encuentra en una circunferencia de radio $\frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}$ cuyo centro se halla a su vez en otra de radio $\frac{\sigma_a + \sigma_b}{2}$ con centro en "O" por lo que como puede comprobarse en la figura

$$\sigma_c = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} + \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}\cos 2\alpha$$

$$t_c = -\frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}\operatorname{sen} 2\alpha$$



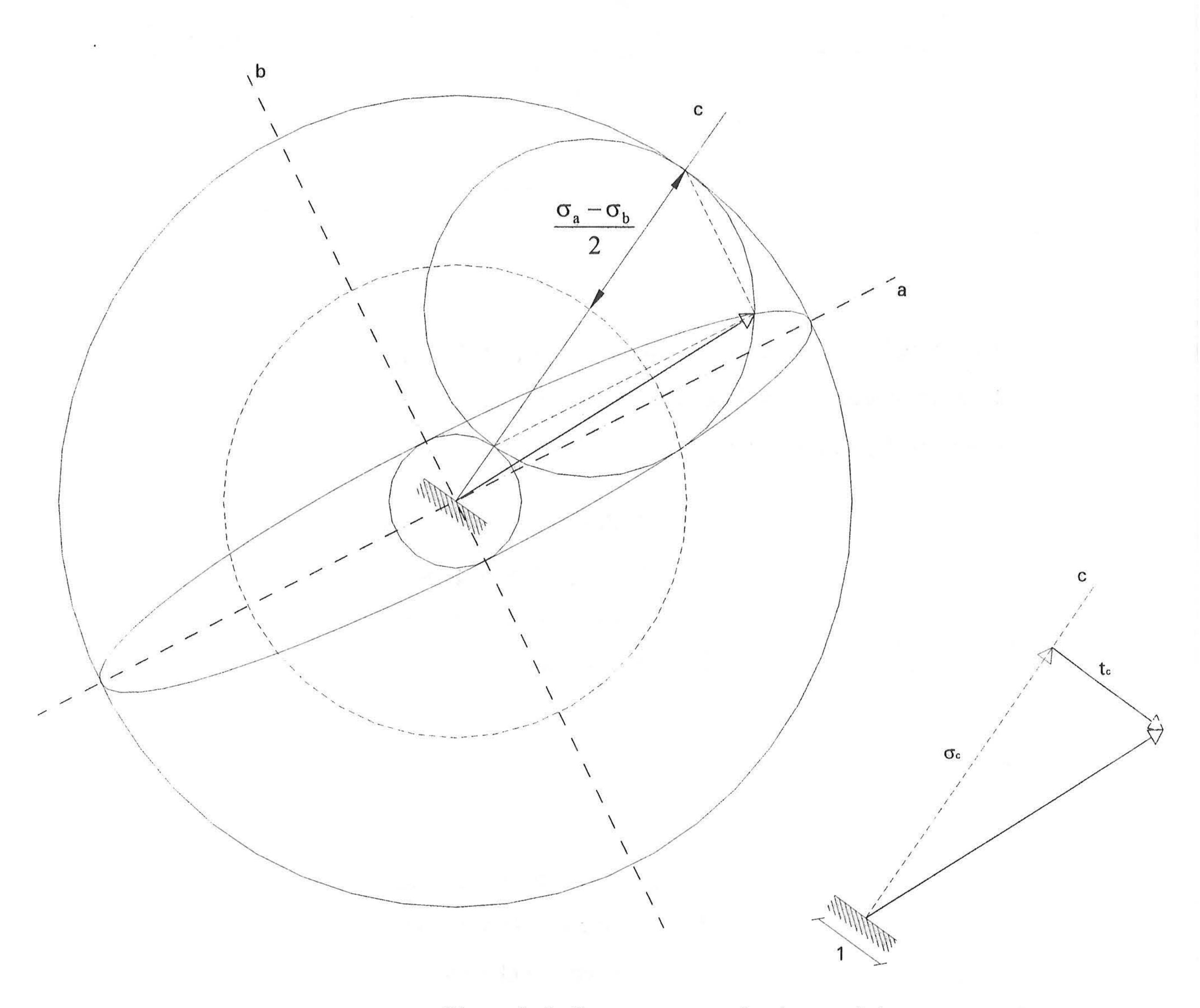
La construcción del vector asociado a una dirección cualquiera coincide con la de un punto de la elipse de semiejes σ_a y σ_b, en consecuencia:

Los extremos de los vectores tensión asociados a los cortes en un punto están en una elipse de semiejes σ_a y σ_b llamada Elipse de LAMÉ.

(en el caso de estados triples de tensión, hay tres direcciones principales y los extremos de los vectores están en un elipsoide)

CIRCUNFERENCIA DE MOHR

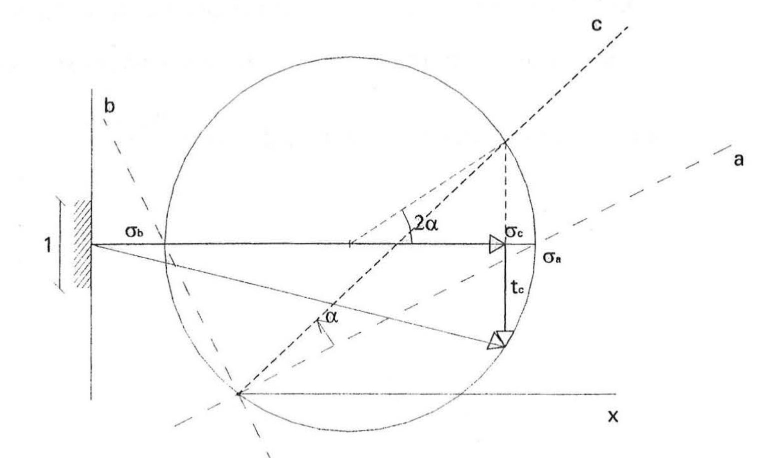
Como puede observarse en la construcción de la Elipse de Lamé, todos los extremos de los vectores tensión se encuentran en la circunferencia auxiliar de radio $\frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}$



Plegando la figura como un abanico se obtiene una construcción más económica (al precio de ser algo más críptica) debida a MOHR.

y en un sistema de coordenadas σ, τ se traza unacircunferencia de radio

$\frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}$ con centro a una distancia $\frac{\sigma_a + \sigma_b}{2}$ del origen

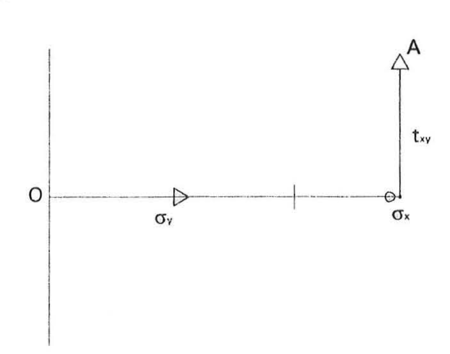


en efecto:

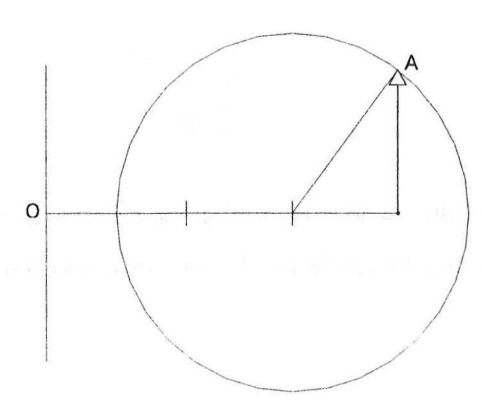
$$\sigma_c = \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} + \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}\cos 2\alpha$$

$$t_c = -\frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}\operatorname{sen} 2\alpha$$

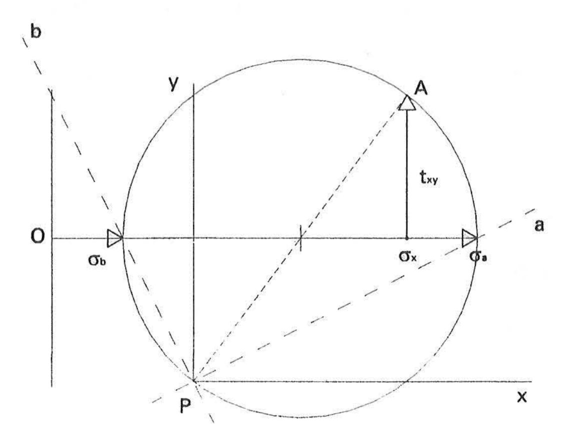
La Circunferencia de Mohr resulta directamente de la construcción de la página 24, la secuencia del cálculo gráfico, dados σ_x σ_y t_{xy} es como sigue:



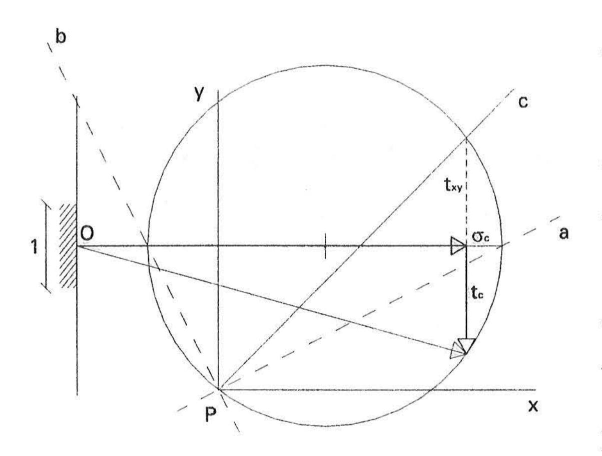
1- Se marcan σ_x y σ_y en el eje de abscisas y sobre el extremo de σ_x se lleva en vertical t_{xy}



2- Se traza la Circunferencia de Mohr con centro en el punto medio de σ_x y σ_y que pase por el punto A, extremo de t_{xy}.



3- Las intersecciones de la circunferencia con el eje de abscisas dan los valores σ_a y σ_b. Uniendo el punto P, diametralmente opuesto a A, con los extremos de σ_a y σ_b se obtienen las direcciones principales.



4- Para obtener la tensión correspondiente al corte perpendicular a una dirección c que forme un ángulo α con a, basta trazarla a partir de P.

El extremo del vector tensión buscado es el punto de la Circunferencia de Mohr simétrico al de su intersección con la recta PC.

Caso de valores negativos de alguna componente de tensión

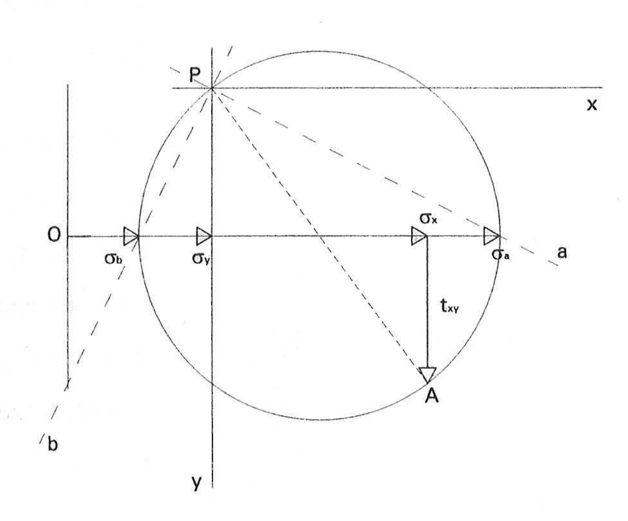
En los ejemplos que siguen se recogen todos los casos posibles:

1.-

$\sigma_x = 10 \quad N \cdot mm^{-2}$

$\sigma_y = 4 \quad N \cdot mm^{-2}$

$t_{xy} = -4 \quad N \cdot mm^{-2}$

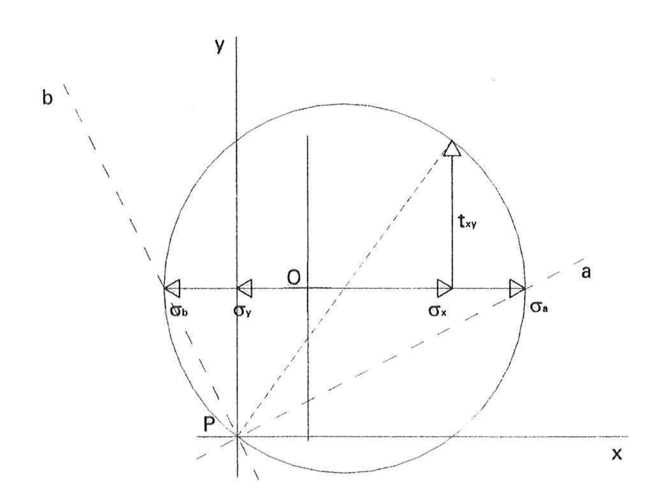


2.-

$\sigma_x = 4 \quad N \cdot mm^{-2}$

$\sigma_y = -2 \quad N \cdot mm^{-2}$

$t_{xy} = 4 \quad N \cdot mm^{-2}$

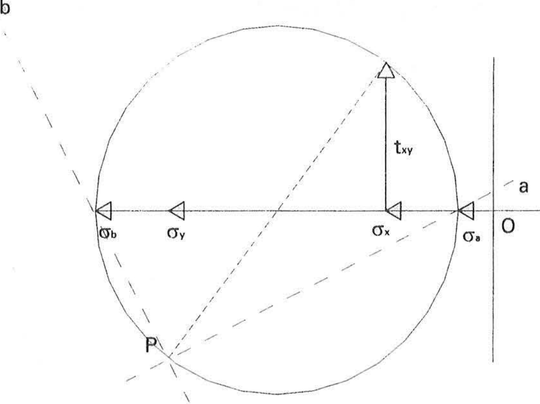


(3.-)

$\sigma_x = -3 \quad N \cdot mm^{-2}$

$\sigma_y = -9 \quad N \cdot mm^{-2}$

$t_{xy} = 4 \quad N \cdot mm^{-2}$

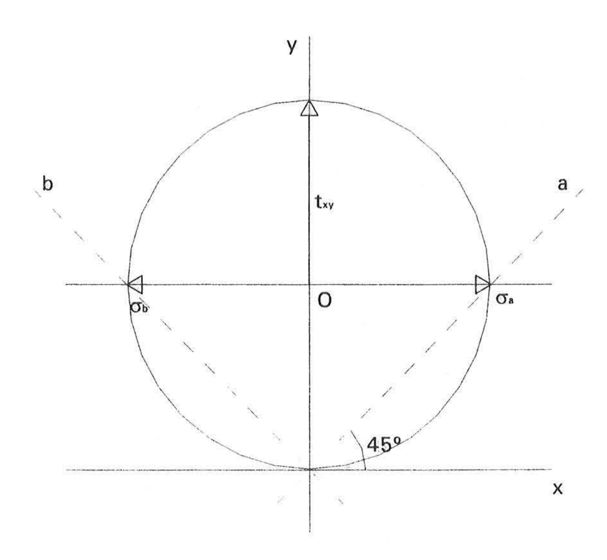


(4.-) estado tangencial puro

$\sigma_x = 0$

$\sigma_y = 0$

$t_{xy} = 5 \quad N \cdot mm^{-2}$



Las tensiones principales son del mismo valor absoluto que t_{xy} y están girados 45° respecto a xy

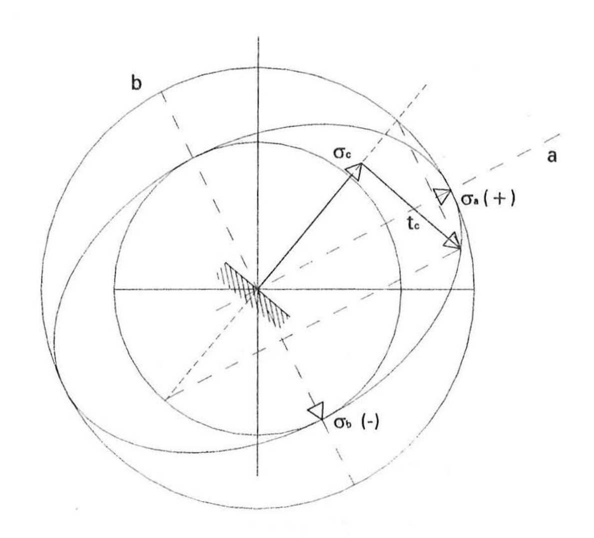
La construcción de la Elipse de Lamé para valores negativos de las tensiones principales, debe tener en cuenta este hecho; por ejemplo para los casos anteriores:

②-

$\sigma_x = 4 \quad N \cdot mm^{-2}$ $\qquad$ $\sigma_a = 6 \quad N \cdot mm^{-2}$

$\sigma_y = -2 \quad N \cdot mm^{-2}$ $\qquad$ $\sigma_b = -4 \quad N \cdot mm^{-2}$

$t_{xy} = 4 \quad N \cdot mm^{-2}$

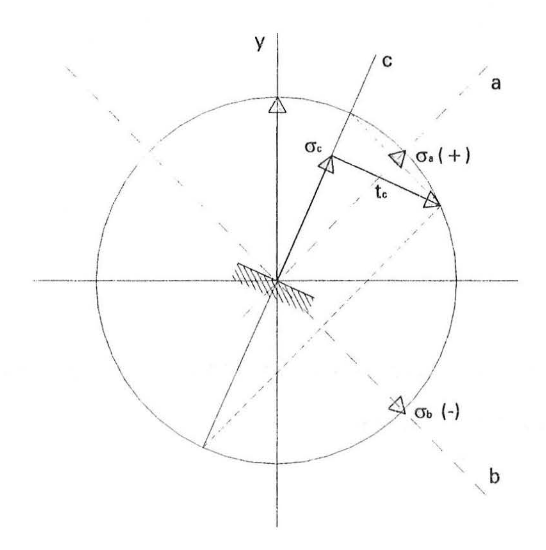


④-

$\sigma_x = 0$ $\qquad$ $\sigma_a = 5 \quad N \cdot mm^{-2}$

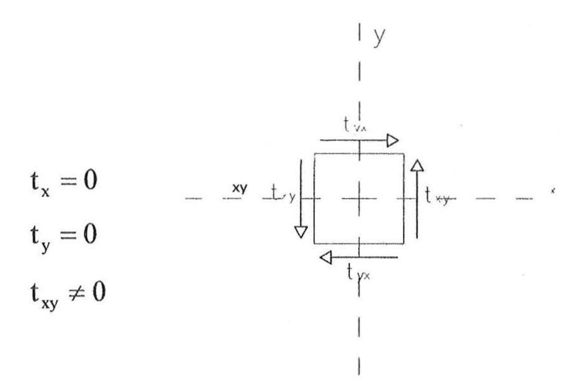
$\sigma_y = 0$ $\qquad$ $\sigma_b = -5 \quad N \cdot mm^{-2}$

$t_{xy} = 5 \quad N \cdot mm^{-2}$



Tensión tangencial pura

Corresponde al estado de tensiones en el alma de una viga a la altura de la línea neutra:

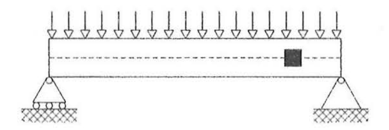


$t_x = 0$

$t_y = 0$

$t_{xy} \neq 0$

(la figura corresponde al alma de la parte derecha de una viga)



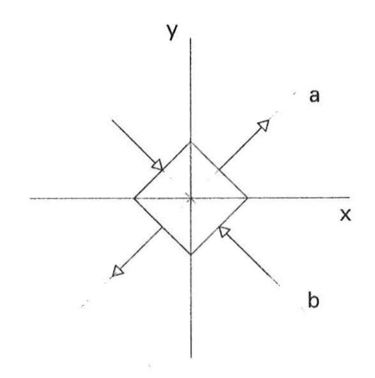
Analíticamente:

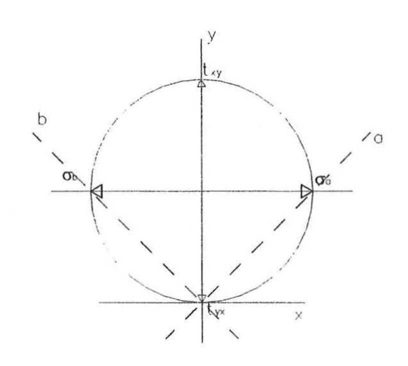
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{t_{xy}}{0} 0 = \infty \qquad 2\alpha \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases}$$

$$\alpha \begin{cases} 45^\circ \\ 135^\circ \end{cases} \qquad \begin{aligned} \sigma_a &= t_{xy} \operatorname{sen} 90^\circ = t_{xy} \\ \sigma_b &= t_{xy} \operatorname{sen} 270^\circ = -t_{xy} \end{aligned}$$

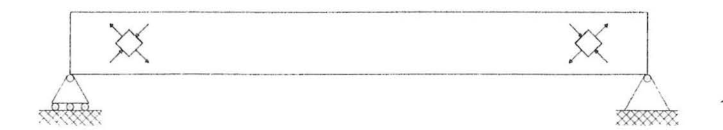
las tensiones principales forman 45° con los ejes x e y y tienen la misma magnitud que t_{xy}

Gráficamente

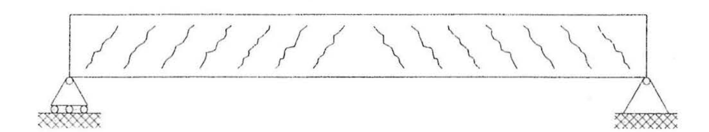




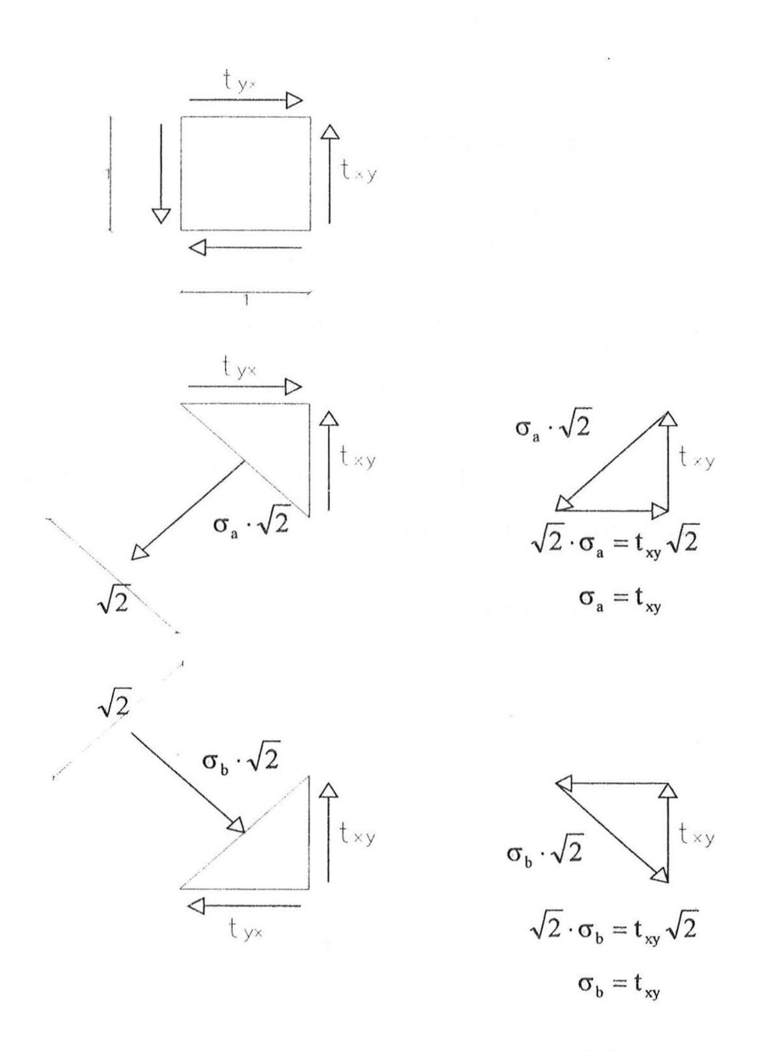
las direcciones principales de tensión pues en el alma de una viga forman 45° con la horizontal



lo que se traduce en el hormigón armado en una fisuración:



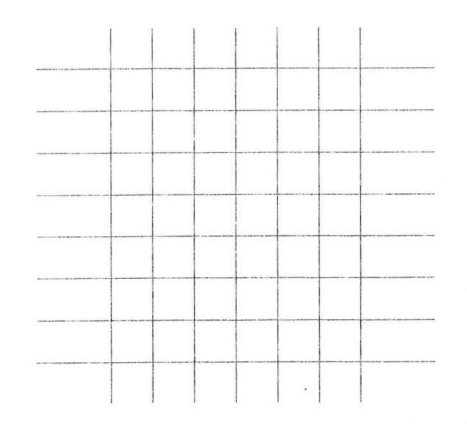
la deducción podría haberse hecho directamente planteando el equilibrio de medio elemento diferencial:



ARMADO DEL HORMIGÓN

En materiales homogéneos como el acero solo interesa conocer el valor de la tensión máxima σ_a para comprobar que no supera f.

En materiales como el hormigón armado en que el hormigón no resiste tracciones, si se conoce, además del valor de la máxima tensión, su dirección puede disponerse la armadura de manera más eficaz posible y de hecho así se hacía hasta los años 60 del siglo XX

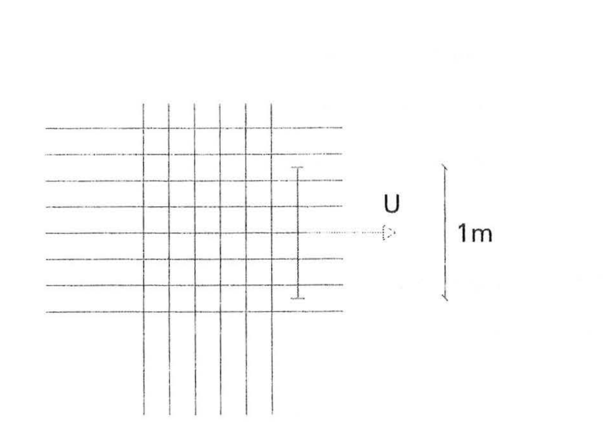


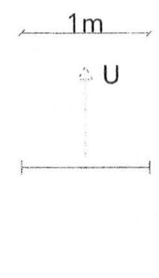
Esta práctica conducía a trazados complicados en las armaduras, actualmente se hace uso del siguiente hecho: una malla cuadrada de ϕ de acero produce el mismo efecto en cualquier dirección:

Llamando U a la capacidad de tracción de la armadura en 1 m de corte de la malla en el que hay n barras de área total A_s

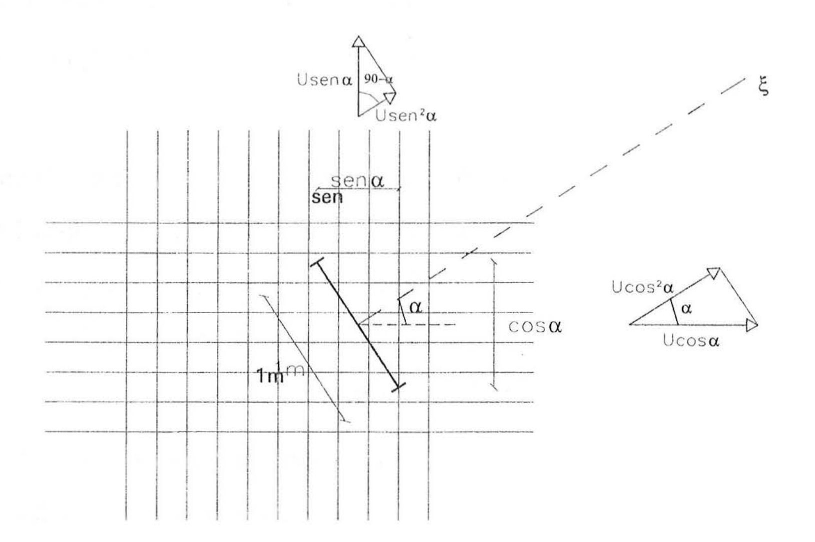
$$U = A_s \cdot \sigma_s$$

está claro que en la dirección de las armaduras la capacidad de tracción es U ya que un corte interesa solo a una de las familias de armaduras.





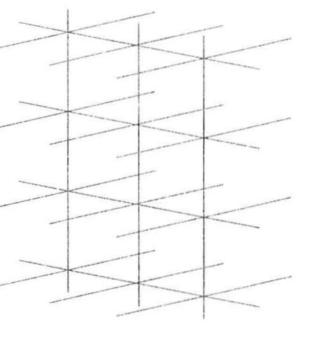
Un corte que forma un ángulo α con el eje x



afecta sólo a parte de las armaduras de cada haz lo que produce una tracción horizontal $U \cdot \cos\alpha$ y vertical $U \cdot \operatorname{sen}\alpha$, proyectándolas sobre la dirección x y sumando las proyecciones

$$U_\xi = U\cos^2\alpha + U\operatorname{sen}^2\alpha = U$$

es decir, basta conocer la tracción máxima y colocar una malla lo que significa simplemente emplear el doble de armadura que si se colocara en la dirección correcta, lo que elimina de paso los posibles errores de orientación de las direcciones principales asociadas a errores de los signos de las t_{xy} que no son en modo alguno imposibles



En el caso de problemas tridimensionales una malla en 3 direcciones (que supone colocar el triple de acero) asegura el mismo efecto en cualquier dirección del espacio.

Una variante de este armado se consigue mezclando en la hormigonera fibras de acero:

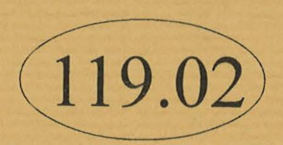


que quedan orientados de forma aleatoria y confieren al hormigón una resistencia a tracción uniforme en cualquier dirección.

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

84-9728-157-8